Trabajo y Energía

Mario I. Caicedo

Departamento de Física

Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Motivación **2**

2. Elementos de Matemáticas **4**

2.1. Desplazamiento Infintesimal 4

2.2. Campos Vectoriales 6

2.2.1. El Peso cerca de la Tierra: 7

2.2.2. La Fuerza de Interacción Electrostática: 8

2.3. Integrales de Línea 9

2.3.1. Técnicas de cálculo 10

2.4. Dependencia de las Integrales de línea en los Caminos. Campos Conservativas 12

3. El Teorema del Trabajo y la Energía **14**

4. Energía Potencial **15**

4.1. Más acerca de U 18

1. Motivación

Uno de los problemas fundamentales relaconados con las leyes de Newton es el de encontrar la posición de una partícula en función del tiempo a partir de la fuerza neta aplicada sobre ella y de las condiciones iniciales del movimiento. Desde el punto de vista matemático, este problema consiste en resolver tres *ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas*[1] y en general es un problema que no posee soluciones cerradas[2].

En esta sección queremos introducir las ideas fundamentales que soportan el concepto de energía y que elaboraremos con mayor detalle en el resto de las notas. Con este fin, consideremos una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una recta bajo la influencia de una fuerza neta F, caso en el cual la ecuación de movimiento para la particula será sencillamente

$$m\,\ddot{x} = F\,, \tag{1}$$

supongamos adicionalmente que la fuerza depende de la posicion de la particula, esto es: $F = F(x)$, de manera que podemos reescribir la ecuacion de movimiento como

$$m\,\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} - F(x) = 0 \tag{2}$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena para expresar la aceleración como

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}\,, \tag{3}$$

lo que en definitiva nos permite reexpresar la segunda ley de Newton en forma diferencial como sigue:

$$m\,v\,dv - F(x)\,dx = 0\,. \tag{4}$$

[1] una para cada coordenada de la partícula

[2] es decir, en términos de funciones elementales

Ahora bien, si suponemos que $U(x)$ es una funcion[3] tal que

$$-\frac{d\,U(x)}{d\,x} = F(x)\,, \tag{5}$$

y observamos adicionalmente que

$$d(m\,v^2/2) = m\,v\,dv \tag{6}$$

la forma diferencial de la segunda ley de Newton puede reexpresarse como

$$d\left(\frac{m\,v^2}{2} + U(x)\right) = 0 \tag{7}$$

ó

$$\frac{m\,v^2}{2} + U(x) = constante \tag{8}$$

La constante que aparece en el miembro derecho de la igualdad (8) puede y debe pensarse como una de las dos constants de integración asociadas al problema de integración de la ecuación de movimiento, es a esta constante lo que denominamos *energía mecánica total* (E) de la partícula. Debemos destacar que la existencia de E depende de la existencia de la funcion $U(x)$ que a su vez recibe el nombre de *energia potencial.*

Recapitulando lo que acabamos de hacer y reexpresándolo en el lenguaje usual de los matemáticos podemos afirmar que hemos demostrado lo siguiente

Teorema 1 *Si en un movimiento a lo largo de una recta existe una funcion $U(x)$ relacionada con la fuerza que actúa sore la partícula como*

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} \tag{9}$$

la energía mecánica total de la partícula

$$E \equiv \frac{m\,v^2}{2} + U(x) \tag{10}$$

es una constante del movimiento.

[3]cuando la fuerza solo depende de la posición, siempre es posible encontrar una tal función $U(x)$

Podemos construir un teorema relacionado volviendo directamente sobre la ecuacion de Newton, en efecto, integremos la ecuacin de movimiento entre dos puntos espaciales A y B para escribir

$$\int_{v_A}^{v_B} d\left(\frac{m\,v^2}{2}\right) = \int_A^B F(x)dx \tag{11}$$

definiendo el trabajo realizado por la fuerza F entre los puntos A y B como

$$W_{AB} \equiv \int_A^B F(x)\,dx \tag{12}$$

se obtiene luego de integrar el lado izquierdo de la ecuacin

$$T_B - T_A = W_{AB} \tag{13}$$

donde la cantidad $T \equiv Mv^2/2$ es denominada energia cintica de la particula.

La fórmula (13) y su derivación para los problemas limitados al movimiento a lo largo de una recta constituyen una versión elemental del denominado *teorema del trabajo y la energia*.

Como veremos más adelante este teorema es más general que el teorema de conservación de la energía ya que existen fuerzas -el roce por ejemplo- que no pueden obtenerse a partir de un potencial.

En el resto de estas notas nos vamos a dedicar a extender estas ideas a movimientos mas generales.

2. Elementos de Matemáticas

2.1. Desplazamiento Infintesimal

Consideremos una curva en el espacio -que denotaremos por: C- y una partícula en movimiento cuya trayectoria coincida con C. En coordenadas cartesianas el vector de posición de la partícula es:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{u}}_x + y(t)\,\hat{\mathbf{u}}_y + z(t)\,\hat{\mathbf{u}}_z \tag{14}$$

donde las funciones: $x(t), y(t), z(t)$, representan las coordenadas de la partícula dadas en "fórma paramétrica". El desplazamiento de la partícula durante un intervalo de tiempo infinitesimal es por definición (véase la figura 2.1):

$$d\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t) \tag{15}$$

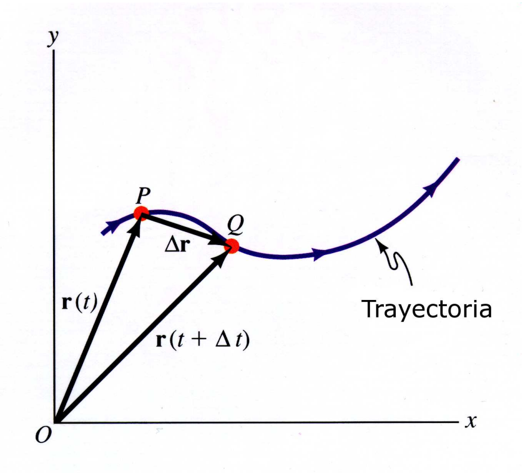

Figura 1: El desplazamiento de una partícula entre los instantes t y $t + \Delta t$ se denomina desplazamiento infinitesimal cuando $\Delta t \to 0$

Desde el punto de vista geométrico, el vector $d\mathbf{r}$ constituye un desplazamiento infinitesimal (ó diferencial de camino) a lo largo de la curva C, que de acuerdo con las fórmulas usuales del cálculo infinitesimal debe representarse con la fórmula:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \tag{16}$$

donde: $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula y dt el intervalo infinitesimal de tiempo. Así, en coordenadas cartesianas el diferencial de camino se expresa en la forma

$$d\mathbf{r}(t) = (\dot{x}\,\hat{\mathbf{u}}_x + \dot{y}\,\hat{\mathbf{u}}_y + \dot{z}\,\hat{\mathbf{u}}_z)\;dt = dx\,\hat{\mathbf{u}}_x + dy\,\hat{\mathbf{u}}_y + dz\,\hat{\mathbf{u}}_z \tag{17}$$

Evidentemente, en dos dimensiones la expresión para el desplazamiento infinitesimal se reduce a[4]

$$d\mathbf{r}(t) = dx\,\hat{\mathbf{u}}_x + dy\,\hat{\mathbf{u}}_y \tag{20}$$

A partir de este punto vamos a introducir diversos objetos matemáticos que a primera vista pueden resultar extraños, pero que son totalmente necesarios para dar una definición precisa de lo que es el trabajo y que por lo tanto están relacionados con las versiones generales de los teoremas del trabajo y la energía y de conservación de la energía.

2.2. Campos Vectoriales

Comenzaremos con introducir una interesante generalización al concepto de las funciones de variable real que toman valores reales ($f : \Re \rightarrow \Re$)

Definición 1 *Un campo vectorial es una función que a cada punto del espacio le asigna un vector.*

[4]Utilizando que en coordenadas polares la velocidad se expresa como

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \tag{18}$$

se puede demostrar facilmente (*ejercicio*) que en estas coordenadas la expresión general para el desplazamiento infinitesimal adopta la siguiente forma

$$d\mathbf{r}(t) = dr\hat{u}_r + rd\theta\hat{u}_\theta \tag{19}$$

En el caso de dos (2) dimensiones y se pensamos en coordenadas cartesianas, la definición anterior significa que para cada punto del plano (identificado por sus coordenadas (x, y)), un campo vectorial es un objeto definido por la siguiente fórmula general:

$$\mathbf{F} = F_x(x, y)\hat{\mathbf{u}}_x + F_y(x, y)\hat{\mathbf{u}}_y \tag{21}$$

Para entender lo que es un campo vectorial es bueno pensar en un primer ejemplo físico. Imaginemos un riachuelo que corre sin turbulencias, si miramos en punto determinado de la superficie veremos que todas las partículas en suspensión que pasan por ese punto llevan siempre la misma velocidad, si nos fijamos en otro punto veremos algo parecido; de esta manera, se puede saber la velocidad de una partícula en suspensión con solo saber el sitio en que se encuentra, o dicho en formulitas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) \tag{22}$$

oro ejemplo menos sencillo es el campo vectorial

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\hat{\imath} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\hat{\jmath} \tag{23}$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.2

2.2.1. El Peso cerca de la Tierra:

Si se piensa en una partícula de masa M que se encuentra cerca de la superficie terrestre, el peso, esto es, la fuerza que la tierra ejerce sobre la partícula, resulta ser un campo vectorial uniforme que en el sistema de referencia usual (el eje y positivo apunta hacia arriba) está dado por:

$$\mathbf{F}(x, y) = -Mg\hat{\mathbf{u}}_y \tag{24}$$

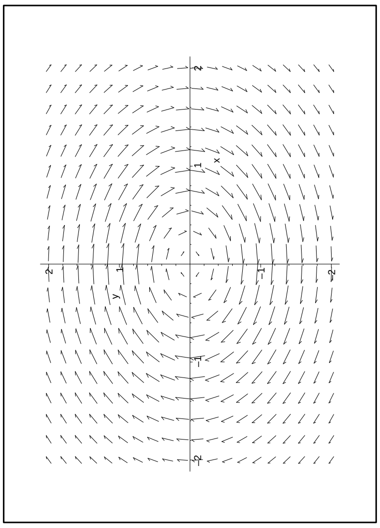

Figura 2: El campo $\mathbf{v}(x,y)$ se vizualiza como un conjunto de vectores cuyos orígenes coinciden con cada uno de los puntos (x,y) del plano

2.2.2. La Fuerza de Interacción Electrostática:

Este es un ejemplo mucho menos trivial que el anterior. La ley de Coulomb establece que entre dos partículas cargadas electricamente que portan cargas q_1 y q_2 se establece una fuerza cuya magnitud está dada por: $F = kq_1q_2/r^2$ donde k es una constante (que en el sistema internacional de unidades tiene el valor: $9\times 10^9 Newton\times m^2/coul^2$) y r es la distancia entre ambas partículas. En estos términos y si suponemos que la partícula de carga q_1 está fija en el origen de coordenadas, la fuerza sobre la partícula de carga q_2 es un campo vectorial que en coordenadas polares se escribe en la forma

$$\mathbf{F}_{Coulomb}(r,\theta) = k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{u}_r \tag{25}$$

Como ejercicio interesante muestre que la fórmula (25) se escribe de la siguiente forma en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}_{Coulomb}(x,y) = kq_1q_2\left(\frac{x\hat{\mathbf{u}}_x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y\hat{\mathbf{u}}_y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{26}$$

2.3. Integrales de Línea

Vamos a introducir la integral de línea de un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C como un objeto simbólico dado por la fórmula (**fig 5**):

$$I(C) = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{27}$$

En el caso bidimensional y utilizando la expresión general para un campo vectorial la fórmula simbólica anterior adopta la forma

$$I(C) = \int_C (F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy \tag{28}$$

Antes de adentrarnos más en el significado de esta hagamos algunas observaciones:

1. La fórmula (27) tambien puede expresarse en terminos de la velocidad y el tiempo como
$$I(C) = \int \mathbf{F}\mathbf{v}dt \tag{29}$$
2. La fórmula para $I(C)$ contiene dos vectores, pero como hay un producto escalar de por medio el resultado es un escalar.
3. El resultado de calcular $I(C)$ debería depender de los puntos inicial y final de la curva.
4. En principio $I(C)$ debería depender de la curva C. y finalmente:
5. ¿Cómo se calculará el número $I(C)$?.

2.3.1. Técnicas de cálculo

En este parágrafo responderemos la última pregunta que formulamos en la subsección anterior referente a la forma de calcular $I(C)$. Con este fin debemos considerar los ingredientes que aparecen en la definición.

1. La curva C y su objeto asociado $d\mathbf{r}$.

2. El campo de fuerzas $\mathbf{F}$ y

3. Los extremos de C.

típicamente la curva está dada en términos de una parametrización. En los casos más sencillo la parametrización sería o bien una fórmula del tipo $y = f(x)$, o bien una expresion de la forma $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{u}}_x + y(t)\hat{\mathbf{u}}_y$

Consideremos el caso en que la curva está dada por la fórmula $y = f(x)$ (esto es: $\mathbf{r}(t) = x\hat{\mathbf{u}}_x + y(x)\hat{\mathbf{u}}_y$) en este caso la receta de cálculo es evidente: donde aparezca y sustituiremos por $f(x)$ y luego calcularemos dy de acuerdo a la fórmula estándar: $dy = f'(x)dx$. Si hacemos esto la misteriosa integral (28) adopta la pavorosa apariencia:

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} [F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)]dx \tag{30}$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas x de los puntos inicial $(x_1, f(x_1))$ y final $(x_2, f(x_2))$ de la curva C. Si pensamos un momento en la fórmula (30) veremos $I(C)$ no es mas que una integral ordinaria, es decir, que e calcula segun

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \tag{31}$$

donde: $g(x) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x)$.

Cuando la curva esta expresada con una formula del tipo $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{u}}_x + y(t)\hat{\mathbf{u}}_y$, la integral de linea tambien termina siendo una integral ordinaria. En este caso la expresión para $I(C)$ es

$$I(C) = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dt \tag{32}$$

donde t_1 y t_2 son los valores del parametro t en los puntos inicial y final de la curva, y

$$h(t) = F_x(x(t), y(t))x(t) + F_y(x(t), y(t))y(t) \tag{33}$$

A veces la curva se especifica en la forma $x = h(y)$, se deja al lector el ejercicio de encontrar una expresión en términos de integrales "normales". Antes de continuar es importante comentar que los conceptos introducidos aquì serán revisados en detalle en el curso de matemáticas 6.

Ejemplo 1 *Como primer ejemplo de cálculo encontraremos la integral de línea de un campo vectorial constante:*$\mathbf{F} = F_0\hat{\mathbf{u}}_x$ *a lo largo de la curva* $C : y = x$ *(***fig 6***) y entre los puntos* $(0, 0)$ *y* $(1, 1)$.

Es claro que el producto escalar que define el integrando para el cálculo de la integral de línea ($\mathbf{F}.d\mathbf{r}$*) resulta ser*

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r} = F_0 dy$$

de esta forma, al utilizar la relación: $y = x$ *que implica la igualdad* $dy = dx$ *la integral buscada es:*

$$I(C) = \int_{x=0}^{x=1} F_0 dx = F_0 \int_{x=0}^{x=1} dx = F_0 \tag{34}$$

Ejemplo 2 *Ahora vamos a calcular $I(C)$ entre los mismos dos puntos pero definiendo la trayectoria por $C : y = x^2$ (**fig 7**). Una vez más encontramos:* $\mathbf{F}.d\mathbf{r} = F_0 dy$*. Sin embargo, en esta oportunidad la forma de la curva:$y = x^2$ implica una nueva relación entre los diferenciales, a saber:$dy = 2xdx$, en definitiva, $I(C)$ resulta ser:*

$$I(C) = \int_C F_0(dy) = \int_{x=0}^{x=1} F_0(2xdx) = 2F_0 \int_{x=0}^{x=1} xdx = 2F_0 \frac{x^2}{2}|_0^1 = F_0 \tag{35}$$

Es interesante observar que el resultado numérico es el mismo que en el caso anterior.

Ejemplo 3 *En este ejemplo usaremos un campo de fuerzas no uniforme:* $\mathbf{F} = F_0(x^2\hat{\mathbf{u}}_x + y^2\hat{\mathbf{u}}_y)$*. Si calculamos la integral de línea entre los mismos puntos de los ejemplos anteriores y usando las mismas curvas obtendremos en el primer caso ($C_1 : y = x$):*

$$\begin{aligned} I(C_1) &= \int_{C_1} F_0(x^2\hat{\mathbf{u}}_x + y^2\hat{\mathbf{u}}_y).(dx\hat{\mathbf{u}}_x + dy\hat{\mathbf{u}}_y) = \int_{C_1} F_0(x^2dx + y^2dy = &(36)\\ &= F_0 \int_{x=0}^{x=1} 2x^2dx = 2F_0\frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}F_0 &(37)\end{aligned}$$

donde hemos usado explícitamente que $dy = dx$.

En el sgundo caso:($C_2 : y = x^2$) el resultado es:

$$\begin{aligned} I(C_2) &= \int_{C_2} F_0(x^2\hat{\mathbf{u}}_x + y^2\hat{\mathbf{u}}_y).(dx\hat{\mathbf{u}}_x + dy\hat{\mathbf{u}}_y) = F_0 \int_{x=0}^{x=1} (x^2 + 2x^5)dx = &(38)\\ &= F_0(\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^6}{6})|_0^1 = \frac{2}{3}F_0 \end{aligned}$$

2.4. Dependencia de las Integrales de línea en los Caminos. Campos Conservativas

Como ya se ha comentado (y de acuerdo a lo que hemos visto en los ejemplos), el valor de una integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria depende en general del camino que se utilice para calcularla. Debido ha esto los campos vectoriales se dividen en dos clases aquellos en que $I(C)$ depende de C y aquellos en que $I(C)$ es independiente de C. De acuerdo a esta observación introduciremos la siguiente:

Definición 2 *Un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *se denomina conservativo si la integral*

$$I(C) = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{39}$$

es independiente de la curva C*. En caso contrario diremos que el campo de fuerzas no es conservativo.*

En este punto aparecen naturalmente dos preguntas:

1. ¿Cómo podremos averiguar si una fuerza es conservativa o no? y

2. ¿Qué es lo que se conserva?.

La respuesta a la primera de estas preguntas es el tema de esta sección, para responder la segunda pregunta esperaremos un pco más hasta la sección 4.

Es obvio que de acuerdo a la definición (2) para reconocer un campo <u>no conservativo</u> basta con encontrar un par de puntos del espacio y un par de curvas (C_1 y C_2) entre ellos tales que: $I(C_1) \neq I(C_2)$. Desgraciada (y evidentemente) en la pràctica el método de reconocimiento asociado a la definición resulta totalmente inadecuado. En efecto, supongamos que estamos estudiando un campo vectorial $\mathbf{F}$ con el fin de descubrir si es o no conservativo. Podría ocurrir que escogieramos un par de puntos en el espacio (plano) y que probaramos calcular la integral de línea $I(C)$ entre tales puntos con miles y miles de curvas diferentes y que obtuvieramos siempre el mismo resultado. A una persona no acostumbrada a los razonamientos matemáticos podría parecerle que el campo de fuerzas es conservativo, sin embargo si seguimos probando (y si $\mathbf{F}$ no es conservativo) tal vez luego de diez años encontremos una curva a lo largo de la cual la integral de linea arroje un valor diferente.

Luego de haber pensado un poco en el párrafo anterior es claro que no hemos respondido la pregunta: cómo reconocemos si un campo es o no conservativo?. Lamentablemente para responder a esta pregunta tenemos que recurrir a un teorema cuya demostración está completamente fuera del alcance de este curso. Sin embargo, lo propondremos sin demostración (habrá que esperar hasta matemáticas VI).

Teorema 2 *(caso 2D) Un campo vectorial* $\mathbf{F}(x,y)$ *es conservativo si y solo si:*

$$\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} \tag{40}$$

3. El Teorema del Trabajo y la Energía

Comenzaremos esta sección introduciendo la "noción" de TRABAJO.

Definición 3 *El trabajo (W_{AB}) que realiza una fuerza ($\mathbf{F}$) para mover una partícula entre dos puntos (A y B) del espacio a lo largo de una trayectoria dada C está dado por:*

$$W_{AB} = I(C) \tag{41}$$

donde C es la trayectoria que estamos considerando y que obviamente tiene por extremos a los puntos A y B.

Continuemos ahora considerando una partícula sobre la cual actúan varias fuerzas de tal forma que la resultante de estas fuerzas es $\mathbf{F}_{tot}$. Calculemos el trabajo que realiza $\mathbf{F}_{tot}$ al mover la partícula entre dos puntos A y B a lo largo de una cierta trayectoria C. Aplicando la definición resulta:

$$W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{42}$$

en vista de la definición del vector de desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ y de la segunda ley de Newton $\mathbf{F}_{tot} = \dot{\mathbf{p}}$ podemos escribir:

$$W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C \dot{\mathbf{p}}.\mathbf{v}dt = \int_C \dot{\mathbf{p}}.\frac{m\mathbf{v}\,\mathbf{dt}}{m}\,, \tag{43}$$

ó

$$W = \frac{1}{m}\int_C \dot{\mathbf{p}}.\mathbf{p}\,dt = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{p}.\frac{\mathbf{dp}}{dt}dt = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{p}.d\mathbf{p}\,. \tag{44}$$

Observando que: $\mathbf{p}.d\mathbf{p} = d(\frac{1}{2}\mathbf{p}.\mathbf{p})$ y utilizando las reglas de integración usuales obtenemos finalmente:

$$W = \frac{1}{2m}\int_C d(\mathbf{p}.\mathbf{p}) = T(B) - T(A)\,, \tag{45}$$

donde la funcion

$$T = \frac{p^2}{2m} \tag{46}$$

($p^2 = \mathbf{p}.\mathbf{p}$) recibe el nombre de energia cinetica de la particula[5].

Con este cálculo, llevado a cabo sin mayor esfuerzo, hemos demostrado el **Teorema del Trabajo y la Energía** que enunciaremos a continuación:

Teorema 3 *El trabajo total realizado sobre una partícula cuando es llevada entre dos puntos A y B es igual al cambio en su energía cinética evaluado entre dichos puntos extremos de la trayectoria.*

4. Energía Potencial

Para motivar la construcción general de la cantidad que denominaremos *energía potencial* recordemos la ley de Newton para una partícula que se mueve en una dimensión bajo la acción

[5]por favor observe que como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ la energía cinética se puede reexpresar en la forma $mv^2/2$

de una fuerza que solo depende de la posición expresada en la forma

$$v\frac{dv}{dx} - F(x) = 0 \tag{47}$$

que integrando entre dos posiciones x y x_0 de la partícula y sus velocidades asociadas: $v = v(x)$ y $v_0 = v(x_0)$ adopta la forma

$$\int_{v_0}^{v(x)} u\,du - \int_{x_0}^{x} F(s)\,ds = 0 \tag{48}$$

ó

$$T(x) + U(x) = T(x_0) + U(x_0) \tag{49}$$

donde hemos definido la energ—́ia potencial asociada a $F(x)$ como

$$U(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(s)ds \tag{50}$$

lo que implica que $U(x_0) = 0$.

En verdad podríamos haber escogido cualquier otro valor para $U(x_0)$ ya que como veremos luego, la escogencia del punto x_0 es totalmete arbitraria.

Como diuscutimos en la primera sección de estas notas, la igualdad (49) dice que la cantidad

$$E = T(x) + U(x) \tag{51}$$

es una constante del movimiento de la partícula.

Ya hemos comentado que esta es la expresión de la versión elemental del teorema de la conservación de la energía, y como hemos visto no es más que la consecuencia directa de la 2^a ley de Newton aplicada al caso en que las fuerzas solo dependan de la posicón. Es en este caso, y solo en este, que es posible introducir la energía potencial $U(x)$.

A veces en un problema de mecánica en que una partícula se mueve a lo largo del eje x tenemos un conocimiento a priori de la energía potencial, y en esos casos, podemos calcular la fuerza sin mayor problema a través de la fórmula:

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\mathbf{u}}_x \tag{52}$$

Ahora queremos generalizar los resultados anteriores a los casos de dos y tres dimensiones

Supongamos que $\mathbf{F}$ es una fuerza conservativa, entonces, dados dos puntos A y B la cantidad

$$-W_{AB} \equiv -\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} \tag{53}$$

es independiente de la trayectoria que se utilize para ir de A hasta B. Más aún, escogiendo un punto X_0 arbitrario podemos definir una función *La Energía Potencial* asociada a la fuerza $\mathbf{F}$ que solo depende de un punto X según:

$$U(X) \equiv -\int_{X_0}^B \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{54}$$

en términos de esta función, podemos decir que la expresión (53) no es más que la *diferencia de energía potencial* entre los puntos A y B $(U(B) - U(A)$. Con estas pocas herramientas en la mano ya podemos generalizarlos resultados que habíamos estudiado para el caso unidimensional, para ello comencemos por introducir la idea de energía mecánica.

Definición 4 *Dados una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa y un punto X, la cantidad*

$$E(X) = T(X) + U(X) \tag{55}$$

se denomina energía mecánica total de la partícula en el punto X.

Observemos que el hecho de que las fuerzas sean conservativas es absolutamente necesario (de lo contrario no podemos definir U). En las condiciones que permiten definir la energía mecánica total se puede demostrar el teorema de la conservación de la energía que enunciamos a continuación

Teorema 4 *Si sobre una partícula solo actúan fuerzas conservativas la energía mecánica total es constante*

Demostración: de acuerdo a la definición de energía potencial, para cualquier par de puntos A y B la variación de energía potencial está dada por la fórmula

$$U(B) - U(A) = -\int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{56}$$

por otra parte, el teorema del trabajo y la energía asegura que:

$$T(B) - T(A) = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{57}$$

resultado que podemos sustituir en el lado derecho de la fórmula para la variación de energía potencial para obtener

$$U(B) - U(A) = -(T(A) - T(B)) \tag{58}$$

de donde sigue inmediatamente la constancia de la energía mecánica

$$U(A) + T(A) = U(B) + T(B) \tag{59}$$

4.1. Más acerca de U

La funcion energía potencial $U(X)$ es una función que depende del punto X, de manera que si identificamos a este por sus coordenadas cartesianas (x, y, z) podemos poner

$$U = U(x, y, z) \tag{60}$$

es decir, una función de tres variables reales que toma valores reales, ó como escriben nuestros amigos los matemáticos: una función

$$U : \Re^3 \to \Re \tag{61}$$

Ya hemos aprendico que U solo existe si el campo $\mathbf{F}$ es conservativo, y que en ese caso

$$U(x, y, z) = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}.d\mathbf{r} \tag{62}$$

donde, ya sabemos que (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de un punto arbitrario del espacio. Esta relación integral entre la fuerza y la energía potencial puede expresarse en forma diferencial introduciendo una operación (el gradiente)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -grad(U) \tag{63}$$

cuya definición (en coordenadas cartesianas) damos a continuación.

Definición 5 *Dado un campo escalar $V(x, y, z)$ el gradiente de V es un campo vectorial construido como:*

$$grad(V) \equiv \frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\mathbf{u}}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\mathbf{u}}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{\mathbf{u}}_z \tag{64}$$

La versión en dos dimensiones es evidente, y por supuesto, en una dimensión, el gradiente es sencillamente la derivada ordinaria.